

$$II) A_i A_j = O \quad i \neq j$$

$$III) A^2 = A$$

$$IV) r(A) = r(A_1) + \dots + r(A_k)$$

دو فرض دیگر را نتیجه می دهد.

نتیجه ۸-۳-۲ اگر B یک ماتریس $n \times n$ باشد آنگاه B خودتوان است اگر و تنها اگر

$$r(B) + r(I - B) = n$$

اثبات: در قضیه فوق k را برابر ۲ و A را برابر I می گیریم، آنگاه معادل بودن (III, I) با (IV, III) نتیجه را اثبات می کند. ■

نتیجه ۸-۳-۳ اگر $A_1 + \dots + A_k = I$ و $A_i^2 = A_i, i = 1, \dots, k$ ، آنگاه، $A_i A_j = O$.

اثبات: مستقیماً از قضیه ۸-۳-۴ نتیجه می شود. ■

۸-۴ صورت های درجه دوم

تعریف ۸-۴-۱ یک صورت درجه دوم بر حسب بردار x تابعی به شکل

$$Q(x) = x' A x$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (۸-۴-۱)$$

است که در آن A یک ماتریس متقارن $n \times n$ است.

بدیهی است که $Q(0) = 0$. صورت درجه دوم $Q(x)$ در رابطه (۸-۴-۱) را مثبت

معین (نامنفی معین) می نامیم اگر به ازای هر $x \neq 0$ ، $Q(x) > 0$ ، $Q(x) \geq 0$ باشد.

ماتریس متقارن A در رابطه (۸-۴-۱) را مثبت معین (نامنفی معین) می نامیم و با

نماد $A > 0$ ($A \geq 0$) نشان می دهیم هرگاه $Q(x)$ در رابطه (۸-۴-۱) مثبت معین (نامنفی

معین) باشد.

قضیه ۸-۴-۱ یک ماتریس متقارن مثبت معین (نامنفی معین) است اگر و تنها اگر همه مقادیر ویژه آن مثبت (نامنفی) باشد.
اثبات: اگر A متقارن $n \times n$ باشد، داریم

$$A = PDP'$$

که P یک ماتریس متعامد و $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ که λ_i ها مقادیر ویژه A هستند، فرض

کنید $x \neq 0$ ، می توان نوشت

$$Q(x) = x'Ax$$

$$= x'PDP'x$$

$$= y'Dy$$

که $y = P'x$ پس

$$x'Ax = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \quad \leftarrow y = P'x$$

(کفایت) اگر λ_i ها همگی مثبت باشند بدیهی است که $x'Ax > 0$.

(لزوم) اگر A مثبت معین باشد داریم

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 > 0, \quad \forall x \neq 0 \quad (8-4-2)$$

حال فرض کنید $x = Pe_i$ که e_i یک ماتریس ستونی است که درایه i ام آن برابر ۱ و بقیه درایه های آن برابر صفر است. در این صورت $y = P'x = e_i$ پس از (۸-۴-۲) نتیجه می شود.

$$\lambda_i > 0$$

چون این استدلال به ازای هر $i = 1, \dots, n$ صحیح است، اثبات لزوم برای $A > 0$ کامل است. اثبات برای $A \geq 0$ مشابه است. ■

نتیجه ۸-۴-۱ هر ماتریس مثبت معین دارای دترمینان مثبت و وارون پذیر است.

اثبات: از قضیه فوق، قضیه ۷-۱-۴ و قضیه ۶-۴-۳ نتیجه می شود. ■

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n > 0 \quad \leftarrow A \text{ دارد وارون}$$

چون مقادیر ویژه یک ماتریس نامنفی معین مانند A نامنفی است می توان نوشت

$$\begin{aligned} A &= P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{bmatrix} P' \\ &= P \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} P' P \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} P' \\ &= B^2 \end{aligned}$$

که $B = P \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} P'$ ماتریس B را جذر ماتریس A نامیده و با $A^{\frac{1}{2}}$ نشان می دهیم.

بدیهی است که $A^{\frac{1}{k}}$ (k یک عدد طبیعی) به طریق مشابه تعریف می شود. اگر A مثبت معین باشد می توان A^r (r یک عدد گویا) را به صورت

$$A^r = P \begin{bmatrix} \lambda_1^r & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n^r \end{bmatrix} P'$$

تعریف کرد. A^r را برابر I تعریف می کنیم.

قضیه ۸-۴-۲ اگر A یک ماتریس نامنفی معین $n \times n$ و C یک ماتریس $n \times k$ باشد آنگاه $C'AC \geq 0$ و اگر A مثبت معین و C مربع و نامنفرد باشد $C'AC > 0$.

اثبات: اگر $A \geq 0$ به ازای هر $x \neq 0$ داریم

$$\begin{aligned} x' C' A C x &= (Cx)' A (Cx) \\ &= y' A y \geq 0 \end{aligned} \quad \text{چون } C'AC \geq 0$$

اگر $A > 0$ و C نامنفرد باشد چون $y = Cx \neq 0$ داریم

$$\text{if } Cx = 0 \rightarrow C'ACx = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' \mathbf{C}' \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{x} &= (\mathbf{C} \mathbf{x})' \mathbf{A} (\mathbf{C} \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{y}' \mathbf{A} \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{C}' \mathbf{A} \mathbf{C} \geq 0 \end{aligned}$$

از قضیه فوق دو نتیجه زیر فوراً حاصل می شود.

$$\rightarrow a' I a = a' a = |a|^2.$$

نتیجه ۸-۴-۲ به ازای هر ماتریس $n \times k$ مانند C ماتریسهای $C'C$, CC' نامنفی معین هستند.

↓ $A=I \rightarrow \text{مستقل} \rightarrow C'IC \geq 0 \rightarrow C'C \geq 0$
 $(C')'IC' \geq 0 \rightarrow CC' \geq 0$

قضیه ۸-۴-۳ هر ماتریس مثبت معین مانند A را به صورت $A = CC'$ می توان نوشت،

کویک یک ماتریس نامفرد است. $\leftarrow$ متفرد $\leftarrow$ $C = P\sqrt{D} \rightarrow$ هر دو متفرد نیز اند $\rightarrow$ معکوس نیز اند
 اثبات: تمرین $(\sqrt{D})' = \sqrt{D}$ $\leftarrow$ متفرد $\leftarrow$ $\sqrt{D} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}$
 $A = P D P' = (P \sqrt{D})(\sqrt{D} P') = C C' : C = P \sqrt{D} \rightarrow$
 $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = \sqrt{D} \sqrt{D}, \sqrt{D} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \rightarrow$
 $\forall i: \lambda_i > 0$

۸-۵ وارون تعمیم یافته

همان‌طور که می‌دانیم برای اینکه یک ماتریس وارون داشته باشد باید مربع و نامنفرد باشد. در این بخش تعریف وارون را طوری تعمیم می‌دهیم که در مورد همه ماتریسها اعم از مربع یا غیرمربع منفرد یا نامنفرد دارای کاربرد بوده و با تعریف معمولی وارون نیز سازگار باشد.

تعریف ۸-۵-۱ فرض کنید A یک ماتریس $n \times k$ باشد. اگر B ماتریسی $k \times n$ باشد که در رابطه

$$ABA = A$$

صدق می‌کند، B را وارون تعمیم یافته A می‌نامیم و با A^{-} نشان می‌دهیم. بدیهی است که اگر A مربع و وارون‌پذیر باشد $A^{-} = A^{-1}$.

مثال ۸-۵-۱ ماتریس $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و ارون تعمیم یافته ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ است، زیرا

$$AB A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$